

## sintesi di tesi di laurea

### LA CUPOLA DEL BRUNELLESCHI: STUDIO DI VULNERABILITÀ SISMICA ATTRAVERSO MODELLAZIONE AGLI ELEMENTI FINITI E MODELLI PIANI SEMPLIFICATI

*Autori:* Fabio COLLURA - Francesco PRESENTI

*Relatori:* Prof. Ing. Paolo SPINELLI, Prof. Ing. Andrea VIGNOLI, Prof. Ing. Gianni BARTOLI, Ing. Michele BETTI, Ing. Luca SALVATORI

*Il presente lavoro illustra le attività svolte nell'ambito della ricerca sullo stato di salute della Cupola del Brunelleschi in Firenze, che come noto, è interessata da un insieme di plessi fessurativi che si ripetono con regolarità nelle varie vele della Cupola e che si estendono nel tamburo e nelle strutture sottostanti. Da sempre la presenza delle lesioni ha sollevato serie preoccupazioni per la stabilità della struttura e indotto quindi a controllare l'evoluzione dello stato fessurativo presente sul monumento fiorentino col passare del tempo. Queste appaiono attualmente stabili o in progressione molto rallentata rispetto alla velocità media di circa 7 mm/secolo dalla costruzione ad oggi; la stabilità della costruzione a lungo termine della struttura non appare in causa per quanto attiene alle azioni statiche, ma resta aperta la questione del rischio sismico a fronte di eventuali futuri terremoti di alta intensità. È in questa ottica che nel presente lavoro, sono illustrate indagini per la determinazione del grado di vulnerabilità sismica del monumento. La particolarità della struttura in questione e le incertezze relative alle reali caratteristiche reologiche dei materiali rendono estremamente complessa l'analisi di tale costruzione. Per questo, l'integrazione di più strumenti di analisi è un passo irrinunciabile per una corretta interpretazione del comportamento della struttura sotto eventi sismici. Nello specifico viene proposta un'indagine su due percorsi: da un lato, un'analisi globale mediante un programma di calcolo agli elementi finiti; dall'altro un'analisi a macroelementi che consenta di trattare il problema attraverso l'introduzione di un numero limitato di parametri geometrici e meccanici. Le analisi condotte nel presente studio, sono da intendersi come il primo, necessario, passo da percorrere verso l'individuazione di un eventuale intervento strutturale sulla Cupola.*

#### 1. LA CUPOLA DEL BRUNELLESCHI

La celebre Cupola del Brunelleschi (Figura 1), che costituisce la copertura della crociera del Duomo di Firenze, è una delle imprese più importanti e significative di tutto il Rinascimento. Ancora oggi suscita stupore e meraviglia per la sua bellezza e maestosità. La sua grandezza impedì il tradizionale metodo costruttivo mediante l'ausilio di centine, il che ha scatenato una ridda di ipotesi sulla tecnica costruttiva impiegata.

Con la certezza di non aggiungere niente di nuovo a quanto è stato scritto, detto e rilevato fino ad oggi su questo importante monumento, si riporta brevemente le vicende che hanno portato al progetto e alla realizzazione dell'opera in questione e il sistema fessurativo esistente come passo necessario per la comprensione del comportamento strutturale del monumento ed il suo evolversi quando sottoposto ad azioni orizzontali.

##### 1.1. Cenni storici

La costruzione della Cattedrale è iniziata nel 1296 sulle antiche fondamenta della chiesa di Santa Reparata (Figura 2). A capo del cantiere venne posto Arnolfo di Cambio al quale subentrò nel 1349 Francesco Talenti, al quale si deve il completamento del campanile ed un nuovo progetto che alterò quello arnolfiano. Agli inizi del XV secolo si presentava ancora incompleta: erano



Figura 1 - Vista della Cupola del Brunelleschi.

state terminate la navata centrale e le due navate laterali oltre che la zona absidale costituente la base del tamburo della Cupola mentre perché siano realizzate le tribune laterali e probabilmente anche il tamburo della Cupola bisognerà attendere il 1420. Terminata la basilica, restava solo da costruire la cupola, era rimasta nella cattedrale una grande cavità larga 45 metri e posta su un

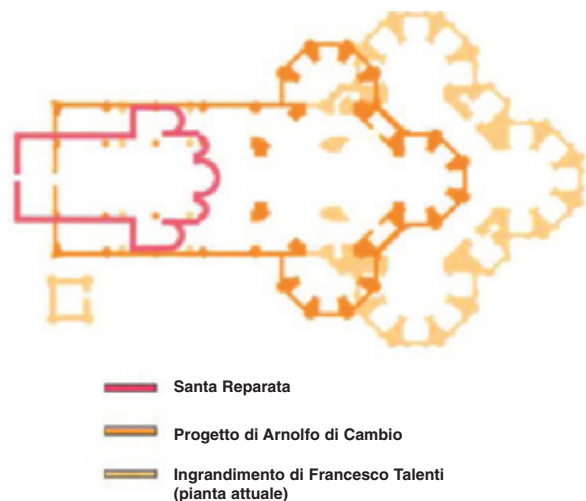


Figura 2 - Schema dell'evoluzione della Cattedrale di Santa Maria del Fiore.

tamburo ad un'altezza di circa 55 metri, alla cui copertura nessuno, fino ad allora, si era ancora posto il problema di trovare una soluzione concreta. Il 27 Marzo 1420 dopo una serie di concorsi, venne deciso di affidare la costruzione a Filippo Brunelleschi e a Lorenzo Ghiberti, il quale aveva già strappato a Brunelleschi il contratto per la Porta del Paradiso. Il 7 agosto 1420 ebbe inizio la costruzione della Cupola, e, dopo un diverbio fra i due architetti, nel 1425 Ghiberti venne estromesso dai lavori che passarono interamente in mano a Brunelleschi. La cupola fu costruita senza impiego di centine per sostenere la muratura. Per la realizzazione dell'opera Brunelleschi impiegò macchine innovative che egli stesso progettò. Il compimento dei lavori della grande opera si protrasse a lungo: nel 1436 la Cupola era compiuta, «*erta sopra e cieli, ampla da coprire con sua ombra tucti e popoli toscani*» (Alberti). Solo nel 1471 con il posizionamento della lanterna poté dirsi completata.

## 1.2. Geometria e struttura muraria

La cupola ha forma gotica archiacuta ed aspetto profondamente rinascimentale, prendendo forma dal tamburo poligonale sul quale è impostata. Essa appare formata da otto padiglioni, o vele, ciascuno dei quali si erge sui corrispondenti lati dell'ottagono di imposta. Eseguendo un'ideale regolarizzazione geometrica può assumersi come modello una Cupola a base ottagonale regolare, voltata a misura di quinto acuto negli angoli interni e di quarto acuto in quelli esterni, con uno sviluppo angolare degli archi di circonferenza pari a  $60^\circ$  (Figura 3). Le vele sono organizzate su due calotte separate da uno spazio vuoto. Il motivo di questa scelta è, oltre che per proteggerla dagli eventi atmosferici, da attribuire ad un alleggerimento della struttura che altrimenti sarebbe stata troppo pesante e, probabilmente, i quattro pilastri sottostanti non l'avrebbero retta. Dunque, la Cupola è costituita da due calotte, una interna e l'altra «*di fuori... per conservarla dall'umido e perché la torni più magnifica e gonfiante...*», collegate da «*24 sproni, 8 negli angoli e 16 nelle facce...*» (due equidistanti su ciascuna vela) mentre nel vano in-

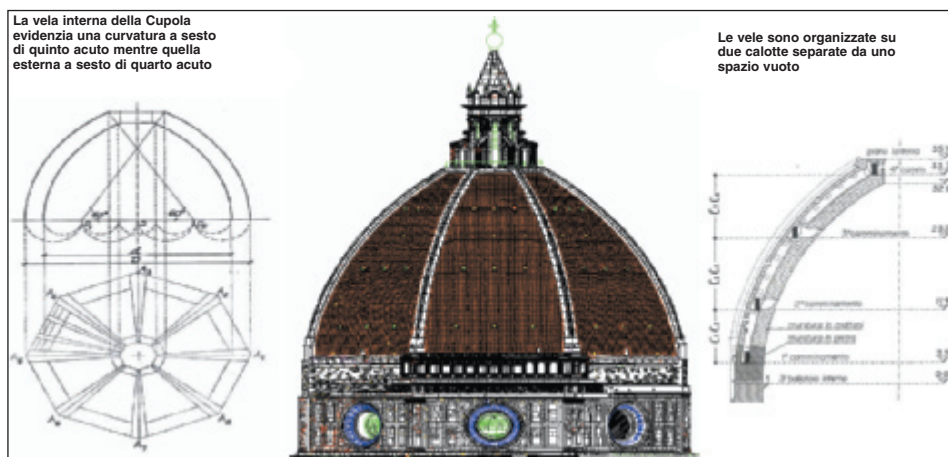


Figura 3 - La Cupola dai rilievi stereofotogrammetrici, forma e struttura.

terno vi sono i camminamenti e «*le scale per poter cercare tutto tra l'una cupola e l'altra...*» [3]. Ogni camminamento percorre la Cupola su tutti gli otto lati ad ogni livello considerato. Gli sproni di collegamento tra le due calotte, sono a loro volta collegati tramite elementi di irrigidimento che seguono l'andamento dei paralleli ed hanno sezione variabile, decrescente muovendo dagli sproni angolari alle mezzerie delle vele. Alla sommità della Cupola una speciale struttura, il «serraglio», anch'essa a simmetria ottagonale rispetto all'asse centrale verticale, chiude e riunisce tra loro le due calotte e i relativi sproni. Sulla sommità del serraglio si imposta la base della lanterna, che corona l'edificio della Cupola.

La copertura della crociera del Duomo di Firenze, è la Cupola in muratura più grande mai costruita senza l'impiego di centine per sostenere la muratura. Il peso è stimabile in 24000 tonnellate [4]; si calcola che per la costruzione siano stati impiegati oltre quattro milioni di mattoni. La muratura della parte più bassa della Cupola è costituita da grossi blocchi squadrati di pietra arenaria murati con sottili letti di calce e senza un'organizzazione geometrica che si discosti chiaramente da quella di una muratura ordinaria a strati orizzontali, o meglio con superfici di ripresa piane, ma lievemente declinanti al basso verso l'asse della Cupola, approssimativamente normali alle superfici delle due calotte. La muratura in questione è a tutto spessore sino a circa 3,50 m sopra il piano di spicco della volta, corrispondente a un'inclinazione di circa  $5^\circ$  sull'orizzontale del raggio che negli spigoli unisce la mezzeria della muratura al centro di curvatura, mentre si divide nelle due calotte tra la quota ora citata e la quota di circa 7 m sopra il piano di spicco della Cupola, corrispondente ad un'inclinazione di circa  $10^\circ$  sull'orizzontale del raggio che negli spigoli unisce la mezzeria della muratura al centro di curvatura, quota alla quale termina la muratura in pietra e comincia quella di mattoni. Invece la sovrastante muratura di grossi mattoni (di dimensioni varie: le due misure più frequentemente usate corrispondono a  $17 \times 34 \times 5$  cm e a  $22 \times 44 \times 5$  cm circa) prende gradatamente, via via che si procede in altezza, una diversa organizzazione ben caratterizzata (per quanto alcuni studiosi ritengano tale

disposizione non evidente in tutte le parti apparenti della muratura) che si è potuta riscontrare anche nella calotta esterna in occasione dell'asportazione e rifacimento parziali del manto di tegoloni esterni: la disposizione cosiddetta "a corda blanda", o "branda", concava verso l'alto (Figura 4). I letti di posa dei mattoni appaiono leggermente incurvati verso il basso (presentando una concavità verso l'alto).

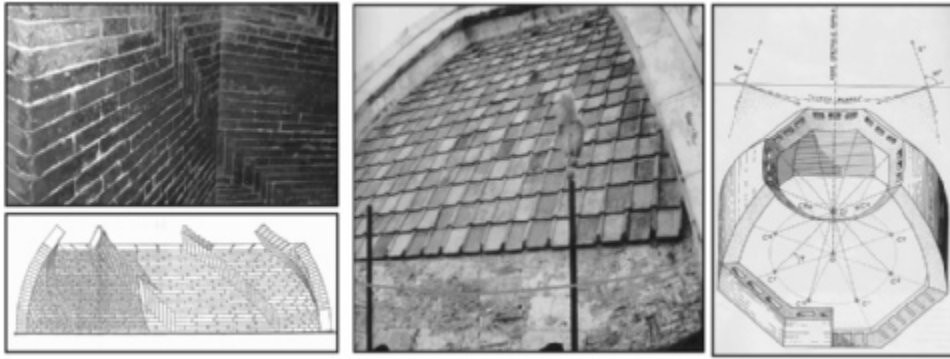


Figura 4 - La struttura muraria: la spina di pesce e la corda blanda.

L'uso di questa disposizione, assicurava una tessitura dell'ordito murario esente da discontinuità lungo tutto l'anello. Come ben noto la costruzione della Cupola della cattedrale fiorentina è avvenuta senza l'utilizzo di centinatura tradizionale procedendo contemporaneamente su tutti i paralleli. Il problema era di come garantire l'equilibrio prima del completamento di ciascun circolo. La soluzione geniale fu nel disporre di "coltello" delle file di mattoni ad intervalli regolari, che creassero le imposte per il tratto di arco piano realizzato tra essi. Si ha così la disposizione dei mattoni, cosiddetta a "spina di pesce".

### 1.3. Lo stato fessurativo della Cupola

La Cupola di Santa Maria del Fiore è interessata, come noto, da un insieme di plessi fessurativi che si ripetono con regolarità nelle varie vele della Cupola e che si estendono nel tamburo (lesioni principali) e nelle strutture sottostanti (lesioni secondarie) [7]. Il sistema di lesioni secondario, risulta essere un fenomeno abbastanza diffuso sull'intera superficie delle volte delle cappelle on viene considerato nel presente articolo ma si rimanda per delucidazioni alla tesi in questione. Nel seguito, per la descrizione delle lesioni e delle loro caratteristiche, si utilizzerà la numerazione convenzionale per individuare i diversi settori (vele) della Cupola; le singole vele sono numerate da 1 ad 8 procedendo in senso antiorario, essendo la vela 1 quella in prossimità della navata della Cattedrale. Da un punto di vista strutturale e architettonico, le vele dispari si trovano in corrispondenza degli archi del tamburo, mentre quelle pari sono situate al di sopra degli elementi di sostegno verticale del tamburo (piloni). Le lesioni principali sono quelle che, con andamento pressoché verticale, interessano, dividendole praticamente a metà, le vele indicate con un numero pari, secondo la numerazione comunemente adottata. La presenza delle lesioni principali ha modificato sostanzialmente il comportamento strutturale della Cupola;

invece di comportarsi come una vera e propria cupola, seppur a pianta ottagonale, il sistema è oggi costituito da quattro semiarchi spingenti collegati in corrispondenza della lanterna e le cui spalle sono costituite dai pilastri, dalla navata e dalle cappelle laterali (Figura 5).

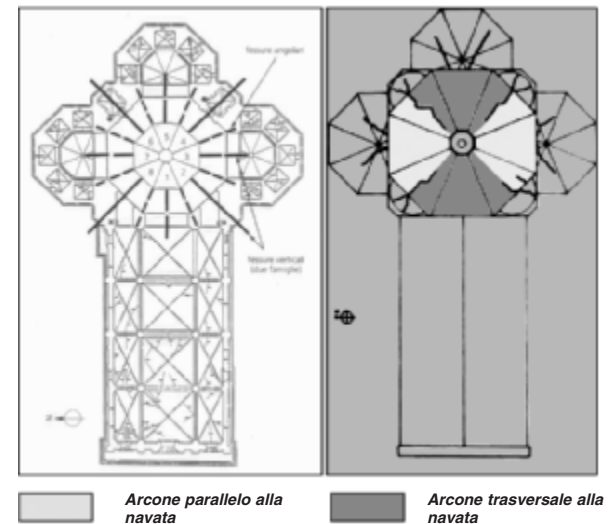


Figura 5 - Stato fessurativo principale e individuazione delle quattro semiarcate (archi voltati).

In particolar modo si individuano 4 famiglie principali di fessure (Figura 6):

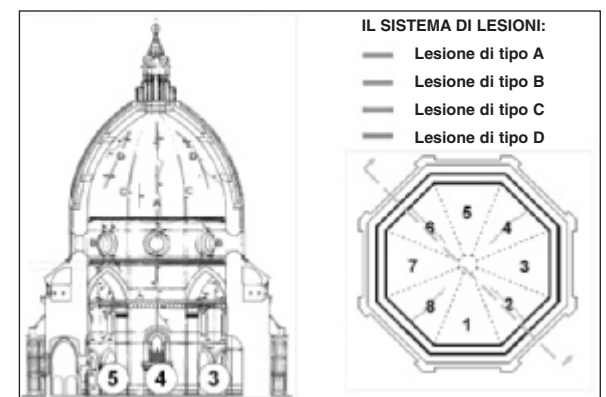


Figura 6 - Il sistema complessivo di lesioni.

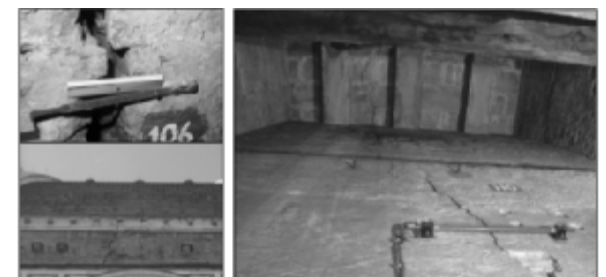


Figura 7 - Rilevamento fotografico delle lesioni.

**Lesioni tipo A (che dividono la cupola in due arcate ortogonali):** quattro lesioni passanti (attraversano entrambe le calotte) nella mezzeria delle vele n. 2, 4, 6 e 8, aventi andamento prevalentemente verticale, che si sviluppano, dalla



quota di estradosso dei quattro massicci piloni fino a circa 2/3 dell'altezza della Cupola (seguendo talvolta l'andamento della "spina di pesce"). Raggiungono la loro massima ampiezza fra gli occhi del tamburo e l'imposta della Cupola. Tra queste, quelle nelle vele 4 e 6, sono le maggiori e raggiungono all'imposta della Cupola un'ampiezza di circa 5,5-6 cm (vedi figura 2), mentre quelle sulle vele 2 e 8, cioè quelle più prossime alla navata, raggiungono un'ampiezza massima valutata in 2,5 cm, anche se lo sgranamento nella vela 2 rende difficile una precisa misurazione.

**Lesioni tipo B:** leggere lesioni inclinate di circa 60° sull'orizzontale, vicino agli occhi del tamburo sovrastante gli arconi (vele dispari), sia sopra ma soprattutto sotto le aperture circolari. Sono abbastanza modeste e coperte, in alcuni casi, dai ripristini di intonaco.

**Lesioni tipo C:** lesioni verticali di ampiezza minore di quelle di tipo A, non passanti all'interno e precisamente negli otto spigoli, a partire dall'imposta della Cupola.

**Lesioni tipo D:** quattro lesioni verticali non passanti, nelle zone di mezzeria delle vele dispari ad un'altezza compresa fra la prima e la seconda serie di occhi interni.

## 2. LE ANALISI NUMERICHE

Per comprendere il comportamento strutturale del monumento sono state utilizzate elaborazioni agli elementi finiti (Figura 8).

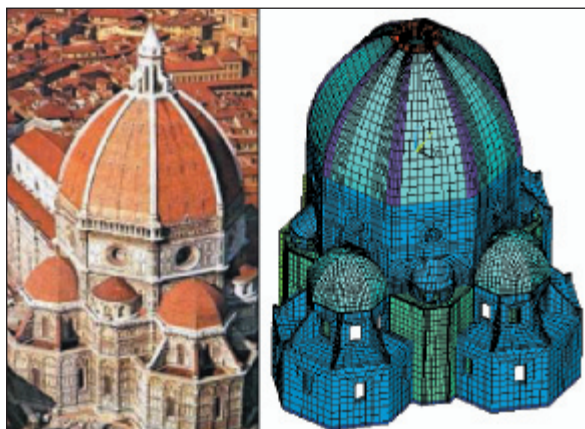


Figura 8 - Vista prospettica del modello agli elementi finiti.

Nel seguito, verranno illustrate le analisi numeriche eseguite al fine di individuare la statica e la dinamica del monumento e le cause che hanno portato ai dissesti ad oggi esistenti. La modellazione numerica è proceduta per gradi, partendo da un modello lineare a elementi tridimensionali fino ad arrivare a un modello non lineare, comprensivo delle principali lesioni opportunamente identificato e in campo statico e in campo dinamico, che ha permesso di riprodurre sia qualitativamente che quantitativamente il reale comportamento della struttura. In generale però, ed indipendentemente dalla complessità dell'approccio numerico adottato, la qualità dei risultati ottenuti dipende prevalentemente dalla quantità e affidabilità

dei dati disponibili. Data infatti l'impossibilità pratica di tener conto in un modello numerico di tutti i fattori geometrici e meccanici che intervengono in una costruzione reale e nella conseguente necessità di operare delle semplificazioni di notevole entità, risulta indispensabile controllare i risultati ottenuti dall'analisi numerica con risultati sperimentali noti [5,6], in modo da tarare i parametri di ingresso e le ipotesi stesse dell'analisi in funzione della migliore rispondenza del modello alla realtà.

### 2.1. Il modello numerico

La realizzazione di tale modello è stata resa possibile attraverso l'utilizzo del rilievo stereofotogrammetrico commissionato dalla soprintendenza nel 1999. Inoltre sono state necessarie rilevazioni in sito per individuare la corretta geometria delle sottostrutture non contemplate nel rilievo stereofotogrammetrico che ha permesso la realizzazione di un modello estremamente fedele alla realtà [8]. È proprio dallo studio precedente che è iniziato il presente lavoro attraverso l'acquisizione del modello numerico, necessario punto di staffetta in uno studio così complesso. A tale modello sono state apportate modifiche e di carattere geometrico e per quanto riguarda la mesh del modello stesso. Il modello numerico globale è stato elaborato attraverso il codice di calcolo agli elementi finiti ANSYS, utilizzando elementi solidi tridimensionali a 8 nodi a comportamento elastico lineare (Figura 9).

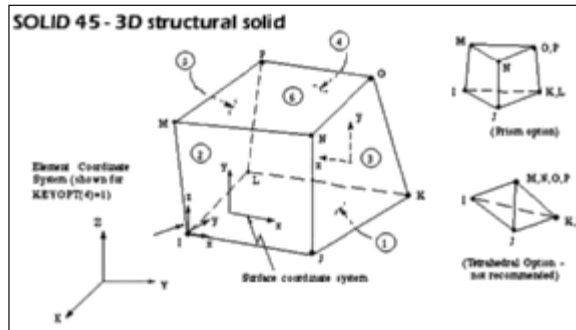


Figura 9 - Rappresentazione elemento "SOLID45".

Il comportamento anelastico della muratura è stato riprodotto al discreto attraverso l'inserimento di elementi gap nelle zone maggiormente sollecitate passando così, da un modello elastico lineare ad un modello e quindi analisi di tipo non lineare.

Il modello è comprensivo della doppia calotta e degli sproni angolari e intermedi che le collegano. Inoltre attraverso la definizione di diversi materiali è stato possibile caratterizzare i diversi elementi strutturali del monumento (Figura 10).

Per quanto riguarda l'interazione terreno struttura sono stati assegnati alla base della costruzione dei vincoli di tipo elastico in grado di riprodurre il comportamento dell'insieme struttura fondazione. La presenza del vincolo laterale offerto dalla navata, è stato modellato attraverso un supporto elastico con rigidezza equivalente a quella

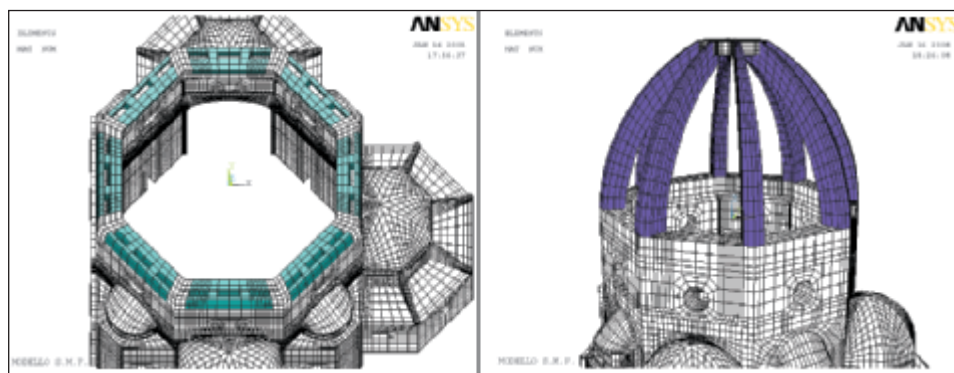


Figura 10 - Sezione orizzontale in prossimità dell'imposta: si nota la presenza delle due calotte, l'una interna più spessa, l'altra esterna più fine. Individuazione dei costoloni angolari in laterizio.

effettiva della navata stessa. In particolar modo, la rigidità equivalente dei supporti elastici è stata determinata attraverso un'equivalenza in termini di rigidità alla traslazione, sia per quanto riguarda la rigidità dei setti laterali, sia per quanto riguarda la rigidità del colonnato centrale (Figura 11).

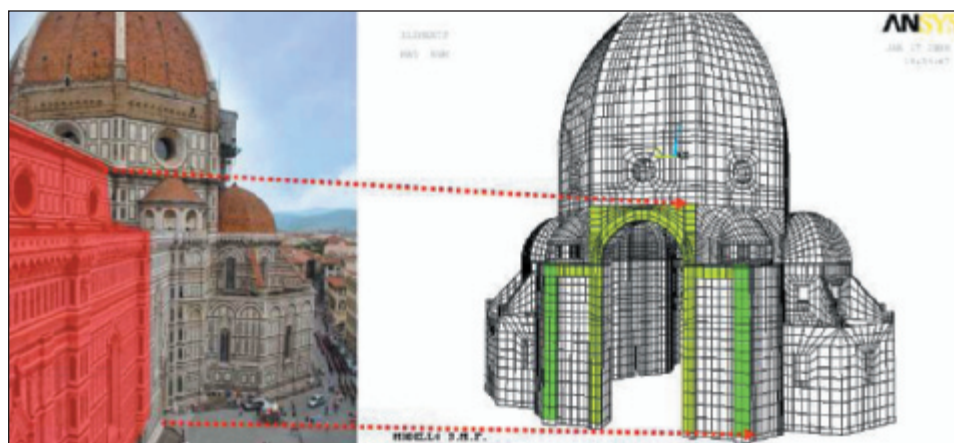
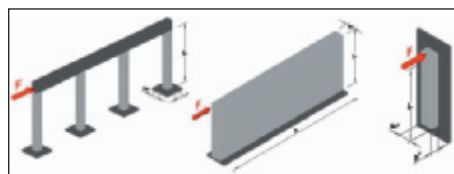


Figura 11 - Rappresentazione del vincolo Navata.

Data la forte incertezza sulle reali caratteristiche meccaniche dei materiali che compongono la muratura della struttura (in particolar modo riguardo il valore da attribuire al modulo elastico), in questa fase si sono eseguite preliminari analisi parametriche variando il valore dei moduli elastici delle varie componenti strutturali. Non rilevando sostanziali variazioni dei risultati in uscita, si è deciso di definire un unico valore medio al fine di non determinare una elaborata ed inutile diversificazione numerica nelle varie parti (Tabella 1).

Tabella 1 - Definizione dei Parametri meccanici caratterizzanti il modello.

Materiale	Modulo di Young $E$ [Kg/cm <sup>2</sup> ]	Coefficiente di Poisson $\nu$	Densità di massa $\rho$ [Kg/cm <sup>3</sup> ]
Cupola (muratura in laterizio)	36000	0,2	1835
Sottostruttura (muratura in pietra)	36000	0,2	2000

Anche per i vincoli al contorno terreno e navata, sono state effettuate varie simulazioni preliminari, ognuna basata su una diversa ipotesi di rigidità alla traslazione dei due vincoli. Confrontando i risultati è stato possibile definire le migliori approssimazioni del modello numerico alla realtà.

Le analisi sono state condotte preliminarmente in campo elastico lineare cercando di comprendere, in questa fase il comportamento d'insieme delle varie componenti strutturali. Sarebbe tuttavia lontano dalla realtà trattare le murature in termini esclusivamente lineari data la loro scarsa resistenza a trazione. Per questo motivo, come accennato precedentemente, sul modello costituito interamente con elementi "brick", ossia solidi tridimensionali isoparametrici, si inseriscono delle sconnessioni interne laddove si riscontrano zone di trazione elevate al fine di modellare al discreto il fenomeno della fessurazione, introducendo così a posteriori la condizione di rottura fragile a trazione del materiale muratura. In particolare il limite di resistenza a trazione è stato stabilito convenzionalmente pari a 2 Kg/cm<sup>2</sup>. Così tutti gli aspetti propri del comportamento meccanico delle murature tali da richiedere leggi costitutive non lineari sono stati considerati. Tale approccio consente di superare la complicata ed ancora incerta modellazione non lineare e di operare importanti risparmi in termini di onere computazionale. In questo modo si è riprodotto con maggiore fedeltà il reale comportamento della muratura. Nello specifico le caratteristiche meccaniche delle lesioni sono state modellate attraverso l'inserimento di contatti di tipo monolateri (elementi gap) e molle (elementi link) (Figura 12).

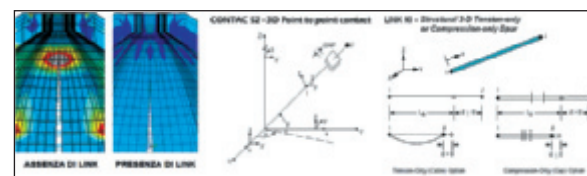


Figura 12 - Modellazione delle fessure al discreto.

Gli elementi gap (CONTAC 52) consente la trasmissione di compressione e attrito fra i lembi delle fessure. L'inserimento degli elementi molle (LINK 10) al fine di caratterizzare le fessure, è stato invece necessario in quanto agli estremi delle fessure siamo in presenza di una singolarità numerica dove, inevitabilmente, le trazioni andranno amplificandosi in quanto siamo in presenza di una cuspid. Poiché tale fenomeno non ha significato fisico, in quanto nella realtà nello spigolo le trazioni superando immediatamente il limite elastico danno luogo a plasticizzazioni o fessurazione con conseguente arrotondamento dello spigolo, sono state introdotte le molle al fine di attenuare le singolarità denunciate, confortati dal fatto che in entrambi i casi, con o senza molle, l'ampiezza delle fessure non subisce sostanziali variazioni non alterando quindi il comportamento strutturale. Altra considerazioni di fondamentale importanza per la comprensione del lavoro svolto, riguarda la modalità di applicazione del carico alla struttura. L'analisi sotto peso proprio si è evoluta attraverso due fasi, una preliminare nella



quale il carico veniva applicato in solo stadio a costruzione ultimata, l'altra simulando le reali tappe di costruzione, in sostanza è stato necessario simulare le reali fasi di costruzione, infatti è possibile affermare con certezza che i piloni e le tribune hanno fondazioni distinte, giacché la costruzione delle cappelle è proseguita parallelamente ai lavori di chiusura della Cupola, ovvero quando i piloni ed il tamburo erano già stati eretti [1]. È stato pertanto necessario procedere con quest'ultima modalità di analisi, in quanto il peso proprio applicato in unico step induceva eccessive sollecitazioni di trazione nelle cappelle laterali, fenomeno dipendente probabilmente dal fatto che l'elaborazione numerica non riesce in un unico passo a riprodurre il naturale assestamento che la muratura subisce durante le fasi di costruzione oltre che a non ricreare il giusto grado di vincolo (giunto compressione) tra le varie parti strutturali realizzate in fasi diverse (Figura 13) al fine di riprodurre il naturale assestamento che la struttura ha subito durante la sua costruzione così da non falsare il comportamento meccanico d'insieme (Figura 14).

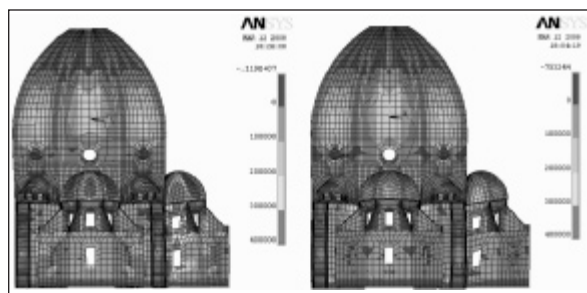


Figura 13 - Modalità di applicazione dei carichi (peso proprio): a sinistra applicazione del carico in un solo passo; a destra simulazione delle fasi costruttive.

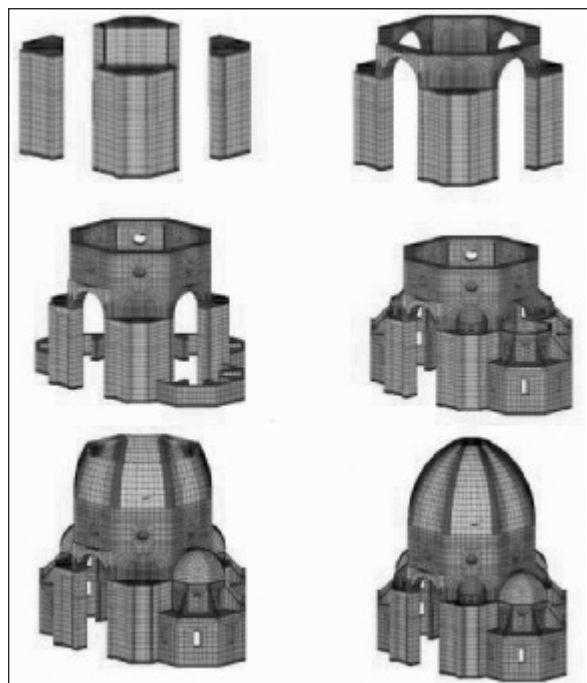


Figura 14 - Rappresentazione delle fasi costruttive.

## 2.2. Analisi Statica

Dall'analisi sul modello integro si nota che, come in tutte le cupole, per l'effetto del peso proprio la struttura possiede nella parte inferiore una zona soggetta a regime di trazione nei paralleli mentre in sommità tali tensioni tendono ad assumere valori negativi (vedi figure 15).

Dall'immagine sopra riportata, notiamo immediatamente che il regime di trazione (di parallelo) nella parte bassa della cupola non presenta un'uniforme distribuzione lungo tutto lo sviluppo dell'ottagono.

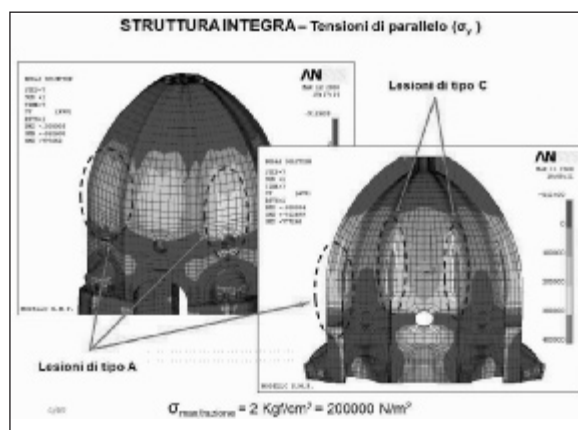


Figura 15 - Stato tensionale all'intradosso e all'estradosso della Cupola (tensioni di parallelo).

Lo stato di sollecitazione nei paralleli della Cupola, deriva dal comportamento di "trave anulare" nella parte inferiore della Cupola, la quale manifesta un comportamento flessionale che è simile ad una trave continua su più appoggi.

In pratica le quattro campate sostenute direttamente dai pilastri fornirebbero, in assenza di lesioni, un vincolo di incastro molto rigido alle altre quattro campate che comprendono gli arconi.

Negli otto spigoli interni invece, le trazioni di parallelo interessano solo uno strato superficiale degli sproni angolari comprovando così la formazione di otto fessure non passanti, corrispondenti alle fessure di tipo C.

Nelle successive analisi si è proceduto modificando in maniera evolutiva le condizioni di vincolo interno del modello numerico, in modo da rappresentare la progressiva estensione delle fessure e verificando ad ogni fase se all'estremità delle fessure si verificassero ancora o meno trazioni orizzontali.

Verificando il raggiungimento di uno stato tensionale ammissibile, si ottiene una situazione stabile del sistema fessurativo, rispettivamente ad un'altezza pari a 2/3 della Cupola per le fessure A passanti, e a metà della stessa, per le fessure C solo interne (Figura 16).

Si ha quindi la graduale evoluzione dal comportamento strutturale a cupola, a quello a cupola lesionata, infatti nei "meridiani" si passa da un regime di sole compressioni verticali ad uno in cui nella calotta esterna compaiono zone che tendono a decompimersi confermato dalle indagini in situ che hanno evidenziato, alle quote identificate dall'analisi, zone scariche, per quanto riguarda le tensioni verticali,

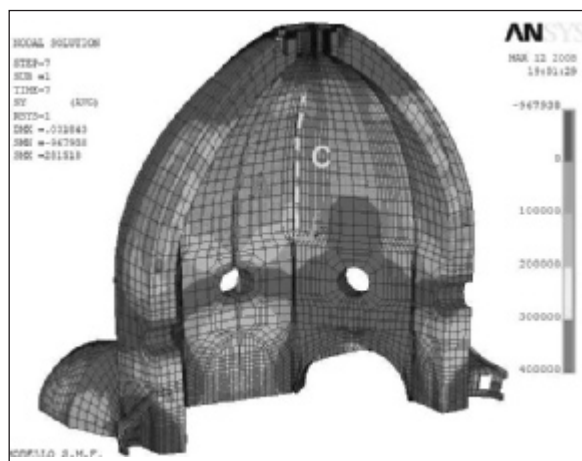


Figura 16 - Configurazione stabile del sistema fessurativo.

all'intradosso della calotta esterna e in ristrette zone dell'estradosso della calotta interna.

### 2.3. Analisi Modale

La conoscenza delle effettive caratteristiche dinamiche della struttura, è necessaria per permettere di affrontare in un secondo tempo il delicato problema della previsione della risposta della Cupola ad eventi sismici.

I valori delle frequenze proprie sono state rilevate nella realtà da una campagna di sperimentazione dell'ISMES del 1987 [6]. Tale campagna sperimentale fu effettuata con sismometri, utilizzando l'azione del vento come "forzante" esterna. Le frequenze proprie che si ricavano hanno valori simili ma non uguali nelle due direzioni principali, pari a circa 1,70 Hz in direzione nord – sud e a 1,80 Hz in direzione est – ovest; inoltre si riscontra l'attivazione delle masse nella direzione verticale alla frequenza di 6,20 Hz.

Si riporta di seguito esclusivamente i risultati dell'analisi modale del modello comprensivo di fessure, tralasciando per motivi di spazio le numerose analisi condotte e gli step necessari per il raggiungimento dei risultati finali, rimandando, per eventuali chiarimenti alla presente tesi di laurea.

In particolare sono state estratte le prime venti forme modali. Dal grafico seguente, che riporta le masse modali effettive attivate in ogni modo, vediamo che i modi di principale interesse sono il primo, il secondo e l'ottavo (Figura 17).

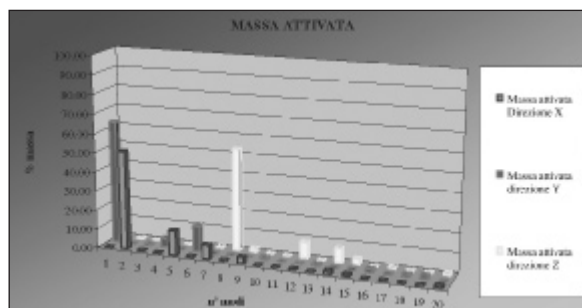


Figura 17 - Istogramma riepilogativo dei modi di vibrare.

Si riporta nell'immagine seguente (Figura 18) la forma del secondo modo di vibrare che risulta essere di pura traslazione in direzione longitudinale alla navata.

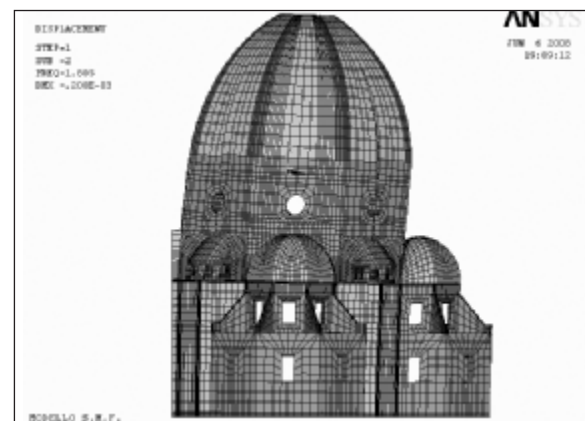


Figura 18 - Rappresentazione del secondo modo di vibrare.

La tabella riassuntiva seguente (Tabella 2) indica la perfetta coincidenza tra i valori in frequenza dei primi due modi di vibrare del modello e i dati sperimentali.

Tutto ciò permette l'utilizzo del modello numerico per la simulazione del comportamento dinamico della Cupola a seguito di azioni esterne di tipo dinamico come eventi sismici.

Tabella 2 - Confronto tra le frequenze misurate sperimentalmente e risultati numerici.

	f 1 [Hz] Trasversale (Nord-Sud)	f 2 [Hz] Longitudinale (Est-Ovest)	f 1 / f 2	$\Delta f$ (%)
<b>DATI SPERIMENTALI</b>	1,70	1,80	0,944	5,56
<b>MODELLO FESSURATO</b>	1,700	1,805	0,942	5,82

### 2.4. Conclusioni

Dalle analisi sopra esposte sono state riscontrate notevoli corrispondenze tra gli stati tensionali ottenuti dalla modellazione numerica e la presenza delle lesioni principali (lesioni di tipo A e di tipo C) presenti sulla struttura reale, confermando oltre al fatto che il peso proprio (oltre che la geometria) della struttura è sufficiente per indurre la formazione del quadro fessurativo attuale, anche l'attendibilità delle operazioni effettuate e quindi la bontà del modello numerico.

Il comportamento meccanico della struttura una volta inserite le fessure cambia e trova un nuovo equilibrio: le lesioni nelle vele pari dividono la Cupola in quattro semiarchi (di sezione a U aperta pari ad un quarto del perimetro e con buona continuità negli spigoli) incastrati alla base e vincolati tra loro in chiave, che tendono ad inflettersi (a causa dei momenti flettenti insorti nei "meridiani" della Cupola, una volta avvenuti gli svincoli interni rappresentati dalle fessure), per effetto del peso proprio (Figura 19).

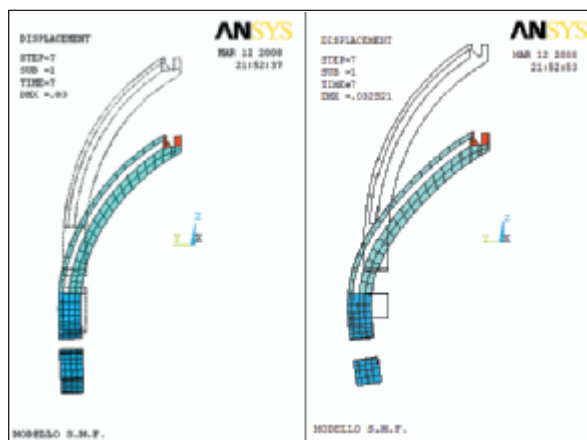


Figura 19 - Deformata della Cupola sotto peso proprio (a sinistra Cupola integra - a destra Cupola fessurata).

### 3. ANALISI SISMICA DELLA CUPOLA

La particolarità della struttura in questione e le incertezze relative alle reali caratteristiche reologiche dei materiali rendono estremamente complessa l'analisi sismica di tale costruzione. Per questo, l'integrazione di più strumenti di analisi è un passo irrinunciabile per una corretta interpretazione del comportamento della struttura sotto eventi sismici. Nello specifico viene proposta un'indagine su due percorsi: da un lato, un'analisi globale mediante un programma di calcolo agli elementi finiti; dall'altro un'analisi a macroelementi che consenta di trattare il problema attraverso l'introduzione di un numero limitato di parametri geometrici e meccanici. Nel primo caso si riscontra il vantaggio di poter analizzare il comportamento globale della struttura, per contro gli svantaggi sono come svantaggi sia il grande onere computazionale che la difficoltà di convergenza della soluzione in quanto consideriamo analisi di tipo non lineare. Mentre nel secondo caso abbiamo vantaggi sia in termini di minor onere computazionale ma soprattutto per quanto riguarda l'introduzione di un numero limitato di parametri meccanici e geometrici. L'unico svantaggio è quello di limitare l'analisi ai macroelementi considerati.

#### 3.1. Analisi sismica agli elementi finiti (Analisi statica non lineare)

Una volta confermata la bontà del modello numerico (realizzato con il codice di calcolo ANSYS) mediante un'identificazione e in campo statico e in campo dinamico, viene affrontato il delicato problema della valutazione della risposta della Cupola ad eventi sismici. Per tale scopo, l'approccio metodologico seguito consiste nell'effettuare una serie di analisi statiche in campo lineare utilizzando un modello tridimensionale agli elementi finiti (comprensivo delle principali lesioni) e applicando ad esso un sistema di *forze orizzontali* proporzionali alle masse [9] [10] (Figura 20) con l'obiettivo di determinare le zone di concentrazione tensionale che ne individuano i punti di debolezza e li introdurre al discreto i danneggiamenti dovuti a sisma (in termini di sconnessioni interne attraverso l'introduzione di "elementi gap"). Infatti le strutture in muratura esibiscono un comportamento globale marcatamente non lineare; in corrispondenza di azioni eccezionali, quali il sisma, la corretta definizione di un modello FEM richiederebbe, in linea di principio, il ricorso ad

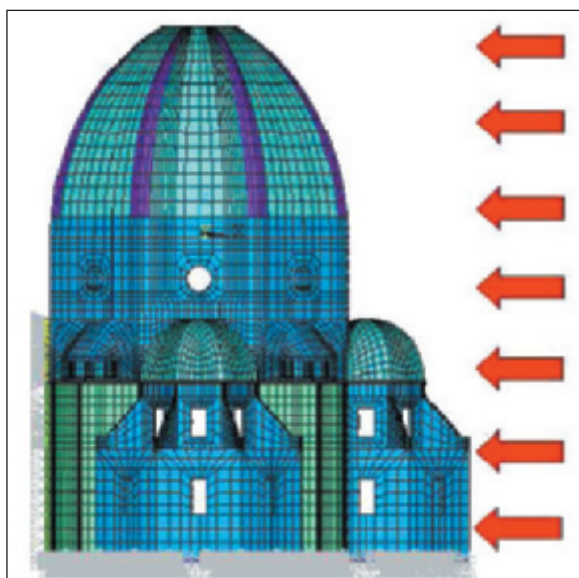
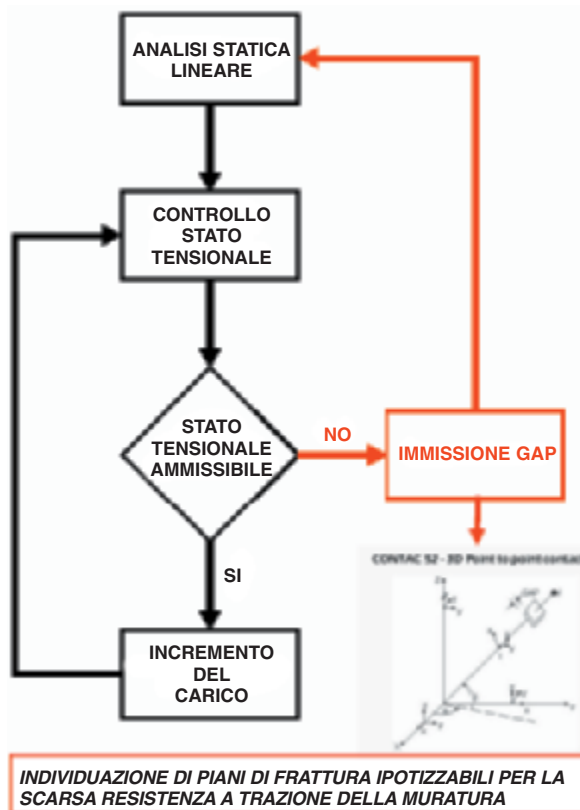


Figura 20 - Applicazione di azioni orizzontali proporzionali alle masse.

un'analisi che tenga conto delle non linearità dei materiali. Sarebbe infatti lontano dalla logica trattare le murature in termini esclusivamente lineari data la loro scarsa resistenza a trazione. Per questo motivo, sul modello costituito interamente con elementi "brick", ossia solidi tridimensionali isoparametrici, si inseriscono delle sconnessioni laddove si riscontrano zone di trazione elevate al fine di modellare al discreto il fenomeno della fessurazione.

In sostanza si procede facendo una serie di analisi lineari dove il carico, dopo avere individuato le zone di trazione che si formano al passo *i*-esimo e li introdotti gli elementi gap, si riapplica da zero su un modello nel quale la rigidità si aggiorna passo-passo (in pratica si esegue un'analisi evolutiva) eseguendo in sostanza un'analisi evolutiva (Figura 21).



INDIVIDUAZIONE DI PIANI DI FRATTURA IPOTIZZABILI PER LA SCARSA RESISTENZA A TRAZIONE DELLA MURATURA

Figura 21 - Diagramma a blocchi della procedura di immissione dei danneggiamenti da sisma (Analisi evolutiva).



In questa fase, per l'individuazione delle zone di debolezza della struttura si ipotizza un legame costitutivo del materiale muratura di tipo elasto – fragile a trazione ed indefinitamente elastico a compressione (Figura 22). Quindi si individuano i piani di frattura ipotizzabili per la scarsa resistenza a trazione della muratura. Per quanto riguarda le direzioni di analisi, sono state considerate sia quella ortogonale alla navata che quella longitudinale alla navata. Come era lecito aspettarsi data la simmetria della struttura, si individuano meccanismi dello stesso tipo per entrambe le direzioni. Nel seguito si riportano i risultati relativi all'applicazione di azioni orizzontali agenti in direzione della navata.

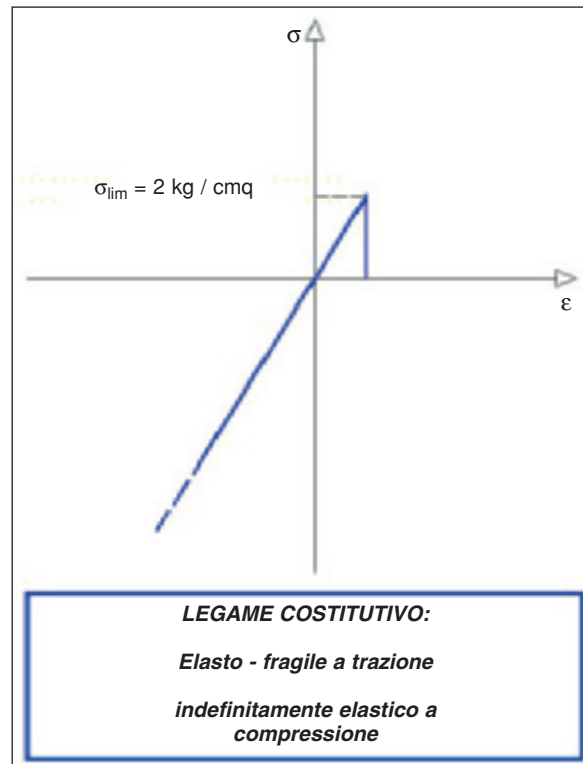


Figura 22 - Legame costitutivo del materiale muratura (elasto-fragile a trazione ed elastico lineare a compressione).

È importante notare che, per l'effetto dell'azione sismica, le lesioni principali (lesioni tipo A) vanno, per così dire, in opposizione di fase (Figura 23) cioè all'apertura di una corrisponde la chiusura dell'altra. Il naturale effetto di tale movimento delle lesioni, sarà una propagazione delle fessure verso l'alto. Aggiornando la configurazione del sistema attraverso l'inserimento di elementi gap nelle zone maggiormente sollecitate si nota una propagazione dei dissesti esistenti verso l'alto.

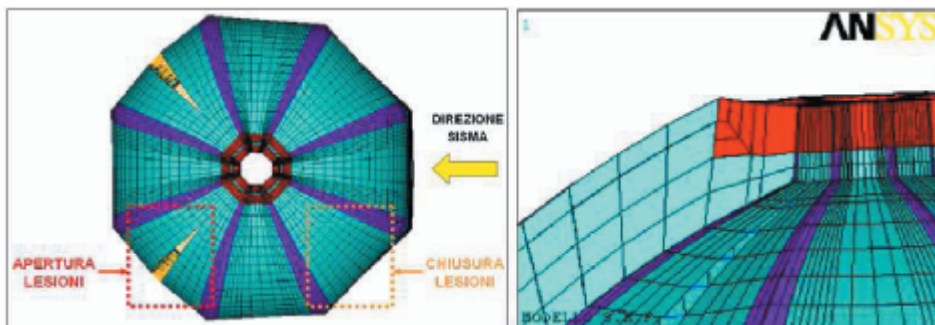


Figura 23 - Comportamento in opposizione di fase delle fessure e propagazione delle lesioni nella zona sommitale.

Esaminando quello che accade in corrispondenza dell'arcone caricato fuori piano, si nota una concentrazione tensionale di trazione in corrispondenza della vela n°3 e n°7 cioè quelle disposte parallelamente alla direzione del sisma. In particolare si hanno concentrazioni di tensioni sia nella zona medio bassa della vela sia in prossimità nell'apertura circolare del tamburo. Analizzando la rappresentazione vettoriale dello stato di tensione (Figura 24), è possibile individuare quelle che plausibilmente sono le direzioni principali di trazione e compressione. Nello specifico si nota che le direzioni principali di trazione e di compressione risultano essere qualitativamente inclinate a 45° rispetto l'orizzontale.

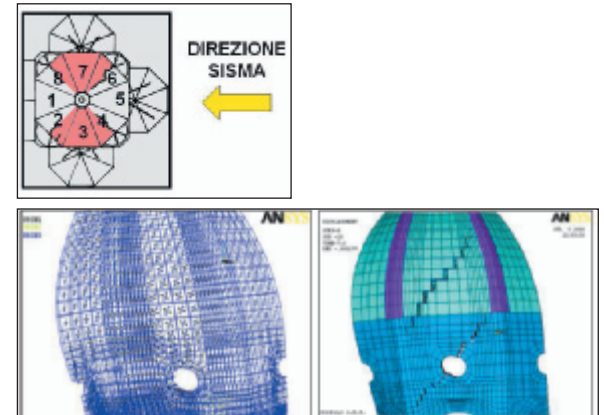


Figura 24 - Rappresentazione vettoriale dello stato tensionale (tensioni principali), su una vela parallela alla direzione del sisma e successiva immissione/apertura delle lesioni.

Aggiornando la configurazione del sistema attraverso l'inserimento di elementi gap nelle zone maggiormente sollecitate si nota effettivamente la formazione di lesioni in direzione normale alla direzione principale di trazione che come precedentemente visto era inclinata di 45° in senso orario rispetto l'orizzontale (Figura 23).

Di fondamentale importanza nella valutazione della risposta sismica della Cupola, risulta essere l'analisi del comportamento a carichi orizzontali dell'arcata il cui piano medio ha direzione parallela a quella dell'azione sismica. In questo caso, i momenti flettenti che già per soli carichi verticali erano insorti nei "meridiani" della Cupola a causa della presenza delle lesioni principali (lesioni tipo A), per carichi aggiuntivi come l'azione sismica qui considerata, vengono fortemente incrementati (Figura 25).



Figura 25 - Incremento di momento flettente nell'arcone soggetto a sisma (tensioni verticali).

L'andamento delle tensioni verticali sulla struttura, confermano la tendenza dell'arcone ad inflettersi. Si procede quindi con l'immissioni di scon-

nessioni per file orizzontali dato che le trazioni individuate hanno andamento prevalentemente verticale. L'inserimento delle sconnessioni determina un rilascio tensionale che comporta inevitabilmente l'apertura di lesioni (Figura 26). In seguito all'immissione dei precedenti svincoli interni, per lo stesso livello di carico notiamo una redistribuzione tensionale che va a coinvolgere la parte sommitale dell'arcone rendendo così necessario l'inserimento di ulteriori sconnessioni interne.

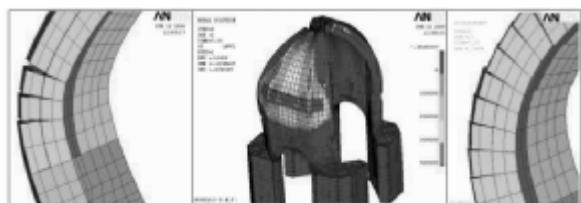


Figura 26 - Particolari delle lesioni: Immissione prime sconnessioni, propagazione delle trazioni orizzontali verso la sommità dell'arcone, progressiva introduzione delle sconnessioni orizzontali.

L'introduzione degli elementi gap nelle zone maggiormente sollecitate della struttura determina un aggiornamento del modello numerico passando così da un'iniziale ipotesi di legame costitutivo elastico lineare ad un legame costitutivo di solido non resistente a trazione che meglio rappresenta il reale comportamento del materiale muratura (Figura 27).

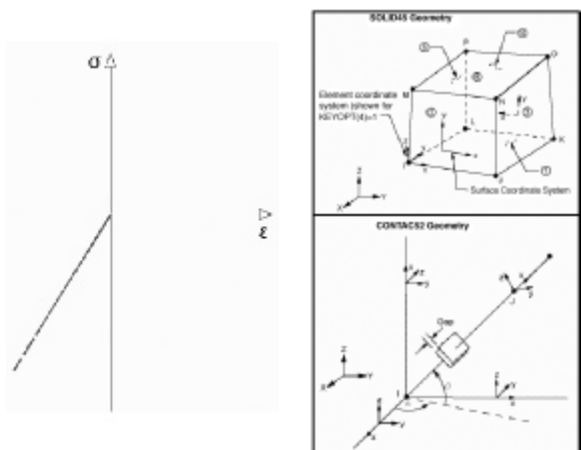


Figura 27 - Legame costitutivo di solido non resistente a trazione ottenuto attraverso l'introduzione di elementi gap (CONTACT52) fra gli elementi SOLID45.

Individuate le zone di debolezza della struttura e lì introdotti gli elementi gap/svincoli interni, si impone la progressiva deformazione laterale della struttura sino al raggiungimento del collasso. In particolare l'entità delle forze orizzontali che determinano il collasso della struttura, corrisponde all'applicazione di un'accelerazione orizzontale pari a  $2,63 \text{ m/s}^2$ . Nello specifico il collasso della struttura è governato da uno scorrimento a taglio delle masse murarie poste ad una quota prossima alla sommità degli arconi costituenti la Cupola (Figura 28). Questo meccanismo è accompagnato da una pura rotazione in corrispondenza della parte bassa del semiarco, meccanismo che senza dubbio favorisce l'attivazione del precedente suddetto.

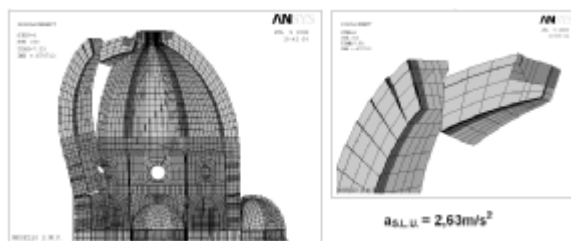


Figura 28 - Deformata della struttura in condizioni di incipiente collasso (SISMA X), con visualizzazione particolareggiata del meccanismo di scorrimento a taglio nella parte sommitale dell'arcone

Riportando il valore dello spostamento orizzontale di un punto di controllo, rispetto al taglio totale alla base dell'edificio, si ottiene la curva di capacità della struttura (Figura 29).

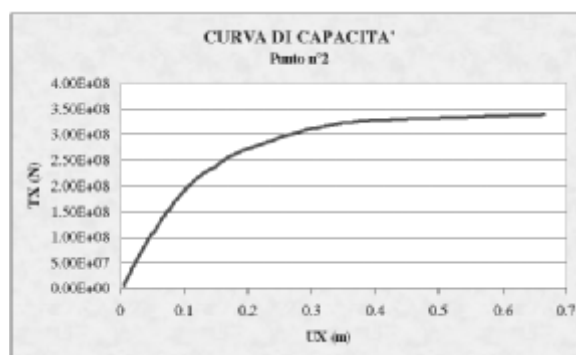


Figura 29 - Curva di capacità relativa al punto di controllo posto in prossimità della zona di collasso.

Il confronto tra l'accelerazione di collasso e quella attesa al suolo non ha un valore cogente ma deve contribuire ad esprimere un giudizio sul livello di rischio del manufatto e quindi su un'ipotesi di un'eventuale intervento strutturale sulla Cupola. In definitiva è possibile affermare che la presenza delle fessure principali presenti sulla Cupola ha determinato il cambiamento del comportamento strutturale del monumento passando da quello di cupola vera e propria a quello di un sistema di arconi. Alle azioni sismiche la "cupola ad arconi" è certamente più vulnerabile rispetto alla cupola propriamente detta. Nello specifico il collasso della struttura è governato da uno scorrimento a taglio delle masse murarie poste ad una quota prossima alla sommità degli arconi costituenti la Cupola. In questo caso infatti, i giunti principali diventano potenziali piani di discontinuità, con conseguente riduzione della resistenza del solido murario, in presenza di sollecitazioni di trazione e taglio dovute all'azione sismica.

Dato che attraverso l'analisi agli elementi finiti si trascurano alcuni fattori come ad esempio la resistenza a compressione del materiale e aggiungendo le inevitabili incertezze sulla definizione delle reali caratteristiche reologiche del materiale muratura, è necessario indagare il problema per altre vie in modo da avere a disposizione elementi di confronto per valutare la bontà dei risultati ottenuti. Lo studio è così proceduto attraverso un'analisi a macroelementi che ha consentito di trattare il problema attraverso l'introduzione di un numero limitato di parametri geometrici e meccanici.

### 3.2. Analisi a Macroelementi

L'analisi a macroelementi consente di trattare il problema attraverso l'introduzione di un numero limitato di parametri geometrici e meccanici. In quest'ottica, l'interpretazione qualitativa del funzionamento sismico viene in genere basata su una lettura per macroelementi, ovvero individuando parti architettoniche caratterizzate da un comportamento in una certa misura autonomo rispetto al resto della costruzione. L'analisi della geometria tridimensionale della struttura è finalizzata ad individuare possibili simmetrie o direzioni significative per il suo comportamento globale. In base a queste osservazioni, infatti, spesso la struttura può essere notevolmente semplificata e i suoi gradi di libertà ridotti. In questo modo è possibile verificare la sicurezza nei riguardi di una condizione limite di collasso facendo riferimento a metodi di analisi più semplici ed efficaci, che pur se non in grado di descrivere il comportamento in condizioni di esercizio, possono cogliere le condizioni ultime.

Una volta definite le caratteristiche meccaniche del modello, questo può essere utilizzato per valutarne la capacità sismica, considerando tale azione come un sistema di forze orizzontali proporzionali alle masse della costruzione attraverso un opportuno moltiplicatore.

#### 3.2.1. Codice di calcolo

L'analisi è stata condotta con l'utilizzo di un codice di calcolo elaborato dalla facoltà di ingegneria di Firenze (Ing. Luca Salvatori, Ing. Prof. Paolo Spinelli [11]). Tale programma di calcolo prevede l'utilizzo di blocchi rigidi e interfacce deformabili. Queste vengono modellate come letti di molle non resistenti a trazione normale e comportamento elastico-perfettamente plastico a taglio, basandosi sul criterio di rottura di Mohr-Coulomb (Figura 30).

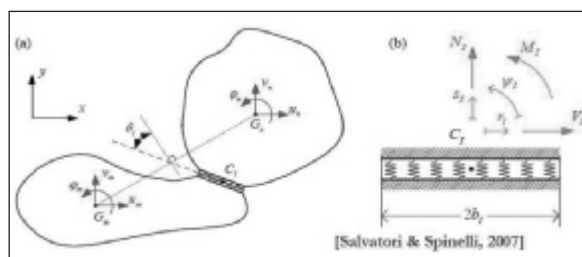


Figura 30 - Configurazione di riferimento e gradi di libertà di due corpi rigidi con una sola interfaccia tra loro (a); tensioni e deformazioni dell'interfaccia per quanto riguarda la superficie media nella configurazione corrente (b) [22].

#### 3.2.2. Modello oggetto di studio

Sulla base sia dei dissesti esistenti che di quelli attivabili durante il sisma, (quest'ultimi desunti dalle preliminari analisi agli elementi finiti) si individua un modello a macroelementi assimilati a blocchi rigidi i quali possono interagire tra di loro attraverso la definizione di opportune interfacce (Figura 31).

Essendo il codice implementato per modelli bi-dimensionali, è necessario eseguire alcuni artifici

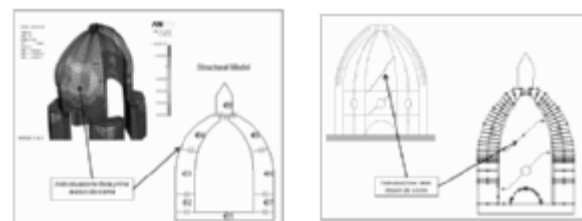


Figura 31 - Passaggio preliminare da modello FEM a modello a macroelementi.

per ricondurre una realtà tridimensionale ad una sua rappresentazione nel piano.

Sono stati dapprima modellati i due semi archi paralleli alla direzione dell'azione orizzontale considerata. Infatti la presenza delle principali lesioni ha determinato la suddivisione della cupola in 4 semiarchi (Figura 32).

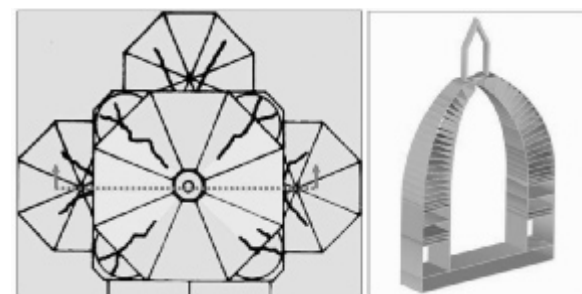


Figura 32 - Modellazione a blocchi dell'arcata sollecitata nel proprio piano.

Sono stati modellati anche gli arconi trasversali ai precedenti, in modo da ricreare le condizioni ritrovate dal modello tridimensionale agli elementi finiti analizzato nel capitolo precedente per ricostruire il vincolo che essi creano in presenza di azioni orizzontali.

In questa discretizzazione sono state definite anche le lesioni inclinate a 45 gradi sull'orizzontale (derivanti dai risultati dell'analisi sismica FEM) in modo da permettere eventuali scorrimenti o ribaltamenti relativi di una o più parti rispetto alle altre (Figura 33).

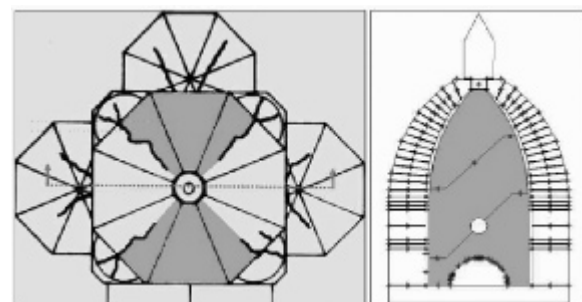


Figura 33 - Modellazione a blocchi dell'arcata sollecitata fuori piano.

Il modello complessivo (Figura 34) risulta così completamente definito.

Sono stati analizzati svariati casi facendo variare di volta in volta i parametri meccanici caratterizzanti le interfacce:



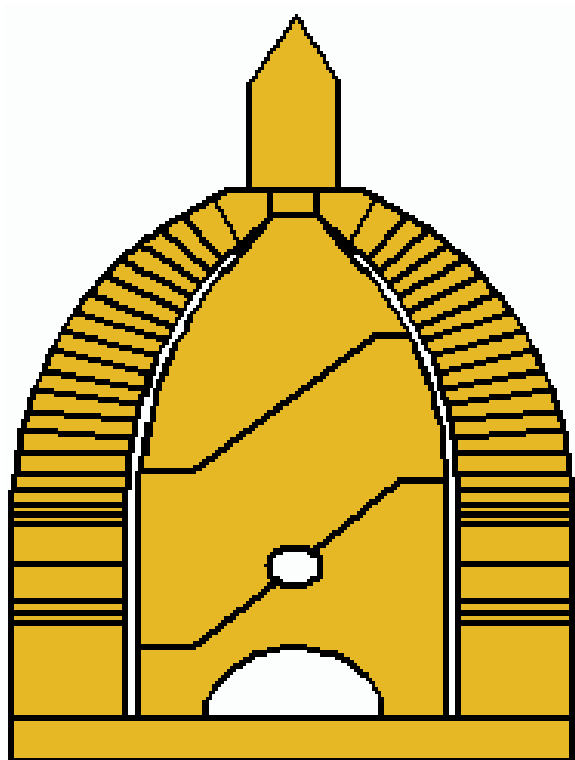


Figura 34 - Modello a Macroelementi.

- resistenza a compressione infinita e coesione infinita (assenza di schiacciamenti e scorrimenti);
- resistenza a compressione finita e coesione infinita (possibilità di schiacciamenti e assenza di scorrimenti);
- resistenza a compressione infinita e coesione finita (assenza di schiacciamenti e possibilità di scorrimenti);
- resistenza a compressione finita e coesione finita (caso fisico).

Riportiamo di seguito i valori dei parametri meccanici utilizzati per caratterizzare le interfacce (Tabella 3).

Tabella 3 - Parametri meccanici delle interfacce.

$\sigma_{c,adm}$ [Kg/cm <sup>2</sup> ]	$c$ [Kg/cm <sup>2</sup> ]	$\mu$
60	6	0,5

### 3.2.3. Iter di formazione del modello

Il modello appena descritto è successivo ad uno sviluppo progressivo dello stesso in funzione sia della risposta dei modelli preliminari alle analisi sia dei risultati ottenuti dalla modellazione FEM, in particolare la successione temporale è la seguente (Figura 35):

1. Modello comprensivo di 8 blocchi con i due semiarchi paralleli all'azione del sisma;
2. Modello a 12 blocchi con l'aggiunta dei semiarchi ai precedenti;
3. Modello a 52 blocchi con una discretizzazione molto più fine dei due semiarchi iniziali;

4. Modello a 56 blocchi comprensivo anche degli archi ortogonali ai precedenti (Modello finale).

Ciascuno di questi modelli è stato analizzato al variare dei parametri meccanici, coesione e resistenza a compressione, considerando quindi la possibilità sia di schiacciamenti che di scorrimenti.

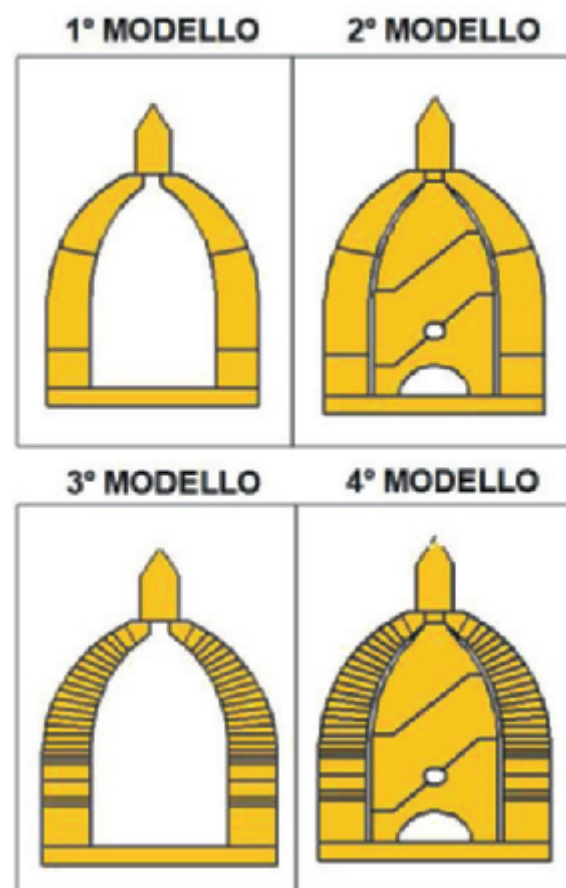


Figura 35 - Modelli analizzati

### 3.2.4. Analisi del modello completo.

L'analisi è stata eseguita in due passi distinti, il primo applicando il peso proprio, il secondo applicando un sistema di forze orizzontali proporzionali alle masse. Partendo dal caso più vicino alla realtà, cioè con coesione e resistenza a compressione finita, si riportano di seguito la deformata al collasso sotto l'azione orizzontale e la curva di capacità relativa al baricentro del blocco corrispondente alla lanterna (Figura 36).

Il modello giunge al collasso per valore di accelerazione pari a  $a_{collasso} = 2,19 \text{ m/s}^2$  ed uno spostamento del punto di controllo  $d_{collasso} = 0,28 \text{ m}$ . I meccanismi attivati sono, oltre alla cerniera bassa nell'arcone di sinistra che provoca la rotazione dello stesso, un meccanismo a taglio nella parte sommitale di tale arco. Si hanno inoltre degli scorrimenti nelle lesioni diagonali degli arconi ortogonali.

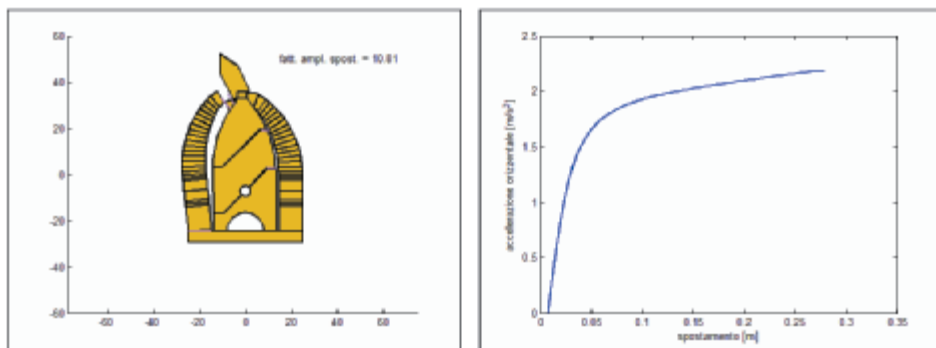


Figura 36 - Deformata al collasso e curva di capacità relativa al blocco lanterna, caso di studio effettuato considerando coesione finita e resistenza a compressione finita.

L'analisi successiva viene eseguita considerando sempre coesione finita ma infinita resistenza a compressione, basandoci quindi sulle ipotesi utilizzate nell'analisi FEM. Si riportano di seguito la deformata al collasso sotto l'azione orizzontale e la curva di capacità relativa al baricentro del blocco corrispondente alla lanterna (Figura 37).

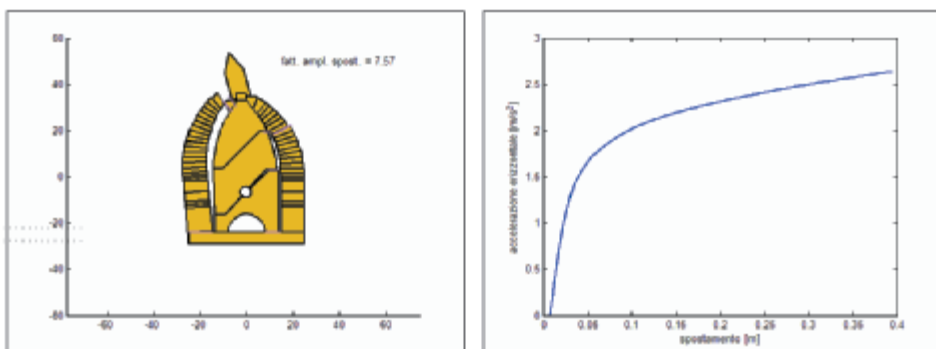


Figura 37 - Deformata al collasso e curva di capacità relativa al blocco lanterna, caso di studio effettuato considerando coesione finita e resistenza a compressione infinita.

Il valore dell'accelerazione per il quale si ha il collasso del modello considerato risulta  $a_{\text{collasso}} = 2,63 \text{ m/s}^2$ . Lo spostamento del blocco relativo alla lanterna risulta essere  $d_{\text{collasso}} = 0,39 \text{ m}$ .

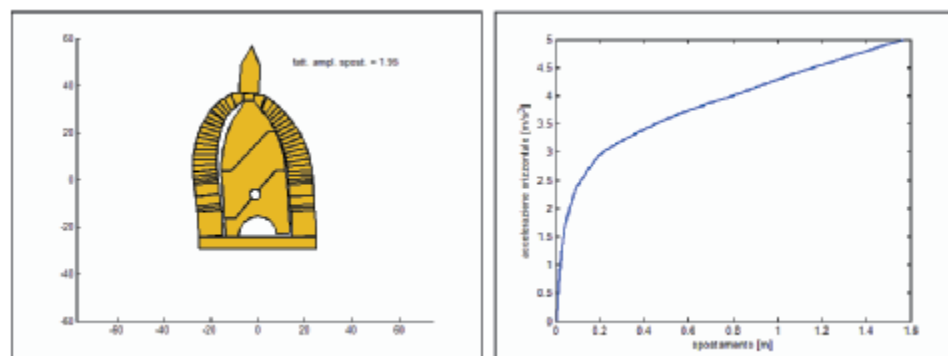


Figura 38 - Deformata al collasso e curva di capacità relativa al blocco lanterna, caso di studio effettuato considerando coesione infinita e resistenza a compressione infinita.

Considerando infinita resistenza a compressione si ha un lieve aumento del valore di accelerazione di collasso, con conseguente innalzamento degli spostamenti, ma rimangono praticamente identici i meccanismi attivati che portano al collasso della struttura.

Si denota quindi oltre che il medesimo meccanismo di collasso rispetto alla modellazione FEM, anche una precisa corrispondenza con il valore dell'accelerazione orizzontale di collasso.

Per finire si analizza il caso con coesione infinita e resistenza a compressione infinita, basandosi quindi sull'ipotesi dell'analisi limite (Figura 38).

Nella situazione limite non si ha il collasso della struttura per valori di accelerazioni inferiori ai  $5 \text{ m/s}^2$ . Dalla deformata si osserva la formazione di cerniere che comunque non comportano la perdita dell'equilibrio.

### 3.2.5. Conclusioni

Le analisi eseguite tramite questo codice di calcolo hanno permesso di individuare quali sono i parametri che riescono a caratterizzare il comportamento della struttura in condizioni di collasso. In particolare analisi eseguite al variare della resistenza a compressione non modificano sostanzialmente né i valori di accelerazione relativi al collasso, né il modo di collassare della struttura. Al contrario è di fondamentale importanza la deformazione a taglio delle interfacce, in quanto riproducendo il relativo scorrimento tra i blocchi rigidi, è in grado di simulare i casi in cui essa contribuisce al collasso della struttura, come nel caso in esame.

## 4. CONCLUSIONI

Le simulazioni numeriche a macroelementi mostrano un buon accordo con i risultati derivanti dalle analisi agli elementi finiti, verificando così, tramite l'integrazione di più strumenti di analisi, il medesimo comportamento della struttura sotto l'azione sismica. Entrambe le simulazioni identificano negli scorrimenti a taglio la potenziale causa di collasso della struttura sotto sisma.

Infine, sono state fatte delle valutazioni qualitative sull'efficacia di un eventuale immissione di tiranti. Sono stati eseguiti due tipologie di presidi. Una prima ipotesi di intervento strutturale caratterizzata dall'utilizzo di catene orizzontali non ha portato effetti in termini di incremento della resistenza sismica; infatti come era prevedibile, sotto queste azioni l'ipotesi di una catena orizzontale è non propriamente efficace in quanto per effetto dell'azione sismica la lunghezza del parallelo orizzontale non cambia o cambia molto poco di lunghezza durante il sisma. Per tale motivo è necessario approfondire gli studi con geometrie più articolate dell'andamento dei cavi rispetto ad un intervento tradizionale a sviluppo orizzontale.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] A. CHIARUGI, D. QUILGHINI, *Scritti scelti di Andrea Chiarugi*, Firenze 2002
- [2] SOPRINTENDENZA PER I BENI A.e A. PER LE PROVINCE DI PRATO, FIRENZE, PISTOIA, *Rilievo stereofotogrammetrico*, FO.A.R.T
- [3] CARLO L. RAGGHIANI, *Filippo Brunelleschi un uomo un universo*, Firenze 1977
- [4] FANELLI, *La cupola del Brunelleschi - Storia e futuro di una grande struttura*, Firenze 2004
- [5] ISMES, *Indagine diagnostica sulle strutture murarie della Cattedrale di Santa Maria del Fiore*, 1991
- [6] ISMES, *Rilievo di vibrazioni sulla Cupola del Brunelleschi in Santa Maria del Fiore*, 1987
- [7] CATALOGO DEI PLESSI FESSURATIVI
- [8] SANTONI B. (2004). *"Santa Maria del Fiore: analisi strutturale della Cupola e delle Cappelle"*, Tesi di Laurea in Ingegneria Civile, Facoltà di Ingegneria, Università degli Studi di Firenze, Relatori: P. Spinelli, G. Bartoli.
- [9] LINEE GUIDA PER LA VALUTAZIONE E RIDUZIONE DEL RISCHIO SISMICO DEL PATRIMONIO CULTURALE CON RIFERIMENTO ALLE NORME TECNICHE PER LE COSTRUZIONI.
- [10] DIRETTIVA DEL PRESIDENTE DEL CONSIGLIO DEI MINISTRI PER LA VALUTAZIONE E RIDUZIONE DEL RISCHIO SISMICO DEL PATRIMONIO CULTURALE CON RIFERIMENTO ALLE NORME TECNICHE PER LE COSTRUZIONI - 2007.
- [11] SALVATORI L. - SPINELLI P. *"Un modello discreto a deformabilità concentrata per strutture in muratura"* - Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale, Università degli Studi di Firenze (2007).